COLLECTANEA MATHEMATICA

PUBBLICAZIONI DELL'ISTITUTO DI MATEMATICA

DELL'UNIVERSITÀ DI MILANO

N. 352

CARLO FELICE MANARA

Il modello di Piero Sraffa per la produzione congiunta di merci a mezzo di merci

Estratto da *"L'Industria"*, fs. 1 (1968), pp. 3-18

MILANO

1968

Carlo Felice Manara

Il modello di Piero Sraffa per la produzione congiunta di merci a mezzo di merci

Editrice L'industria Milano

Estratto dal fascicolo n. 1 1968 de L'industria

1 Scopo del presente lavoro è l'analisi del modello presentato da Piero Sraffa nella seconda parte della sua opera: *Produzione di merci a mezzo di merci*; consta che esistano delle analisi dell'opera stessa per quanto riguarda la prima parte e precisamente quella che tratta delle industrie a prodotto singolo e capitale circolante; ricordiamo tra le altre l'analisi compiuta da Peter Newman (1) e quella compiuta da V. Dominedò (2). Ma non consta a chi scrive queste pagine che esista una analisi, eseguita con mezzi matematici, della seconda parte dell'opera di P. Sraffa e precisamente di quella intitolata: *Industrie a prodotto multiplo e capitale fisso*. L'analisi che qui svolgiamo appare quindi non del tutto inutile; e ciò non soltanto per lo scopo a cui accenna argutamente P. Newman nell'opera citata, e cioè al fine di « ... tradurre l'opera di Sraffa nel dialetto walrasiano, molto più usato, della economia matematica », ma anche e soprattutto per analizzare le basi logiche della trattazione di Sraffa e tentare la enunciazione di ipotesi sotto le quali il suo modello appare accettabile (3); tali ipotesi non

1 P. Newman, *Production of Commodities by Means of Commodities*, « Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik », marzo 1962.

2 V. Dominedò, *Una teoria economica neo-ricardiana*, « Giornale degli economisti », novembre-dicembre 1962.

3 Non ci basta l'animo di usare il termine « viabile » che viene usato da qualche autore, perchè temiamo che nella lingua italiana usuale tale termine abbia un significato diverso da quello che ha il termine « viable » nel linguaggio inglese; pertanto parleremo qui sempre di condizioni di « accettabilità » del modello e di « modello accettabile ».

sempre sono chiaramente ed esplicitamente presentate da Sraffa, forse perchè — per l'uso molto limitato del linguaggio matematico che egli fa — si ritiene dispensato dalla enunciazione precisa delle condizioni sotto le quali le relazioni che egli scrive e le argomentazioni che svolge possano avere senso.

Ma uno dei vantaggi della trascrizione delle argomentazioni svolte col linguaggio comune nel « dialetto » matematico è anche quello di costringere ad una analisi rigorosa dei presupposti e di non lasciare nulla ad una « intuizione » o ad una « evidenza » che sarebbe data dal contenuto della trattazione; evidenza che talvolta può rischiare di portare fuori strada chi si avventura sulle sue malferme ed ingannevoli basi.

E' quasi superfluo avvertire che la trattazione che qui svolgeremo vuole avere un carattere prevalentemente matematico e che quindi gli accenni ad un contenuto economico hanno un aspetto puramente occasionale; quando dovremo enunciare delle ipotesi nella trattazione che segue, lo faremo con la esplicita intesa che intendiamo rispettare la competenza degli economisti per quanto riguarda il giudizio di attendibilità delle ipotesi stesse.

Nel seguito l'opera di P. Sraffa a cui ci riferiamo sarà citata semplicemente con la sigla « SRF » seguita da un numero, che è il numero della pagina della edizione italiana (Editore Einaudi - Torino) del 1962.

2 Per comodità di notazioni, altereremo un poco il simbolismo usato da Sraffa nella sua opera citata, secondo le convenzioni che enunceremo subito.

Indicheremo anche noi con k il numero (intero naturale, ovviamente) delle merci e delle industrie che esistono nel sistema economico che stiamo esaminando.

La formulazione del modello che ci interessa si basa sulla considerazione di $2k^2$ quantità di merci che possono essere comodamente indicate come gli elementi di due matrici quadrate di ordine k.

Indicheremo con $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ tali matrici quadrate e rispettivamente con

$$a_{ij} \quad \text{e} \quad b_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3 \ldots k)$$

i loro elementi. I significati delle quantità a_{ij} e b_{ij} sono quelli indicati da Sraffa (cfr. SRF-57): a_{ij} indica la quantità della merce i-esima che entra come mezzo di produzione della industria j-esima, e rispettivamente b_{ij} indica la quantità della merce i-esima prodotta dalla industria j-esima. Pertanto nelle matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ le righe corrispondono alle merci (intese rispettivamente come mezzi di produzione e come prodotti) e le colonne corrispondono alle industrie del sistema economico.

Indicheremo con

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \ldots, p_k]$$

il vettore le cui componenti sono i prezzi delle singole merci; quindi le componenti prima, seconda, terza, k-esima del vettore $\mathbf{p}$ sono i prezzi rispettivamente della prima, della seconda, della k-esima merce. Indicheremo poi con

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \ldots, q_k] \tag{1}$$

il vettore le cui componenti sono le quantità di lavoro impiegate nelle singole industrie. Indicheremo infine con r il tasso di sovrappiù (o profitto: cfr. SRF-7) e con w il livello generale del salario.

Adotteremo le convenzioni del calcolo matriciale, così come è oggi abitualmente usato ([4]); in particolare quando indicheremo un vettore $\mathbf{x}$ converremo ogni volta di considerarlo come vettore riga, cioè come matrice di tipo particolare (1, k); il vettore colonna che ha le componenti del vettore $\mathbf{x}$ sarà indicato col simbolo « $\mathbf{x}_T$ », cioè come una matrice di tipo (k, 1) che si ottiene da un vettore riga, cioè da una matrice di tipo (1, k), con la operazione di trasposizione.

In particolare ricordiamo che, indicati per esempio con $\mathbf{A}$ una matrice e con $\mathbf{x}$ un vettore, con le notazioni

$$\mathbf{A} > \mathbf{0}\,; \quad \mathbf{x} > \mathbf{0} \tag{2}$$

intenderemo indicare che tutti gli elementi della matrice (e le componenti del vettore) sono numeri positivi. Con le notazioni

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{0} \text{ e rispettivamente } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{3}$$

intenderemo indicare che gli elementi della matrice (o le componenti del vettore) sono numeri non negativi, ma che almeno un elemento (o una componente) è un numero positivo.

Infine con le notazioni

$$\mathbf{A} \geqq \mathbf{0} \text{ e rispettivamente } \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \tag{4}$$

intenderemo indicare che tutti gli elementi della matrice (o rispettivamente le componenti del vettore) sono numeri non negativi, non escludendo quindi che siano tutti uguali a zero.

Con le convenzioni che abbiamo deciso di adottare, il sistema fondamentale di equazioni del modello di P. Sraffa, sistema che compare in SRF-58, viene scritto mediante la unica equazione

$$\mathbf{p}\mathbf{A}(1 + r) + w\mathbf{q} = \mathbf{p}\mathbf{B}\,. \tag{5}$$

Ovviamente ogni componente del vettore che è al primo membro della (5) rappresenta il costo della produzione di una singola industria (costo comprensivo del costo di acquisto delle merci usate come mezzi di

4 C. F. Manara, P. C. Nicola, *Elementi di economia matematica,* Milano, 1967, Appendice II.

produzione, della remunerazione del capitale e del salario del lavoro) e la corrispondente componente del vettore che è al secondo membro della (5) stessa rappresenta il ricavo della industria suddetta.
Dal significato economico della equazione (5) e dei simboli che vi compaiono si trae immediatamente che per le matrici, i vettori e le costanti r e w debbono valere le seguenti relazioni

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{0}\,; \qquad \mathbf{B} \geq \mathbf{0} \tag{6}$$

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0}\,; \qquad \mathbf{q} \geq \mathbf{0} \tag{7}$$

$$\mathrm{r} \geq 0\,; \qquad \mathrm{w} \geq 0\,. \tag{8}$$

Nel seguito dovremo valerci della seguente OSSERVAZIONE. E' possibile riordinare in modo arbitrario le colonne delle matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, eseguendo sopra di esse una qualunque sostituzione, purchè la stessa sostituzione sia eseguita sulle componenti del vettore $\mathbf{q}$; analogamente è possibile riordinare in modo arbitrario le righe delle matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, eseguendo su di esse una qualunque sostituzione (anche diversa da quella eventualmente eseguita sulle colonne), purchè si esegua la stessa sostituzione sugli elementi del vettore $\mathbf{p}$.
In formule, poichè una qualunque sostituzione sulle colonne di una matrice si ottiene moltiplicando a destra questa per una matrice $\mathbf{S}$, che è prodotto di opportune matrici di scambio ([5]) ed una qualunque sostituzione sulle righe di una matrice si ottiene moltiplicando questa a sinistra per una opportuna matrice $\mathbf{T}^{-1}$, che è prodotto di opportune matrici di scambio, la equazione (5) è equivalente ad una equazione analoga che si scrive nella forma

$$\mathbf{p}^* \mathbf{A}^* (1 + \mathrm{r}) + \mathrm{w}\, \mathbf{q}^* = \mathbf{p}^* \mathbf{B}^* \tag{5*}$$

dove abbiamo posto

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}\,\mathbf{T}\,; \; \mathbf{q}^* = \mathbf{q}\,\mathbf{S}\,; \; \mathbf{A}^* = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{S}\,; \; \mathbf{B}^* = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{S}\,. \tag{9}$$

Vale la pena di osservare esplicitamente che la circostanza ora rilevata non si avvera nel caso delle industrie a prodotto singolo, considerate nella prima parte dell'opera di Sraffa. Infatti nella matrice che entra là in considerazione non è lecito riordinare le righe e le colonne con sostituzioni qualunque, anche tra loro diverse, stante il diverso significato che hanno gli elementi delle matrici in quel caso.

3 Ci proponiamo ora di esaminare sotto quali condizioni sia accettabile la equazione fondamentale (5) del paragrafo precedente, equazione che, come è stato osservato, stabilisce il bilancio tra le entrate

5 Cfr. per esempio C. F. Manara, P. C. Nicola, *op. cit.*, Appendice VI.

e le uscite delle varie industrie del sistema economico che si considera. Appare invero dalla trattazione di Sraffa che il compito della equazione vettoriale (5) del paragrafo 2 sopra citata (ovvero del sistema di equazioni equivalente che figura in SRF - 58) sia quello di determinare i prezzi delle merci, quando siano fissati gli altri dati della equazione. E' del tutto ovvio che tali prezzi devono costituire le componenti di un vettore positivo, cioè soddisfacente alle (7) del paragrafo 2. Supponiamo per semplicità che tutte le merci che si considerano siano merci base; ritorneremo in seguito sulla distinzione tra merci base e merci che non lo sono. La ipotesi semplificativa che qui emettiamo porta come conseguenza che la equazione (5) del paragrafo 2 dovrebbe essere sufficiente per determinare il vettore dei prezzi, quando beninteso siano soddisfatte certe condizioni che non si trovano enunciate nell'opera di Sraffa e sulle quali desidereremmo ora soffermarci.

A tal fine scriveremo la equazione fondamentale (5) del paragrafo (2) nella forma seguente

$$\mathrm{w}\,\mathbf{q} = \mathbf{p}\,[\mathbf{B} - \mathbf{A}\,(1 + \mathrm{r})]\,; \tag{1}$$

la analisi che vogliamo svolgere ha come scopo quello di indagare sulle condizioni a cui deve soddisfare la matrice $[\mathbf{B} - \mathbf{A}]$, o più in generale la matrice $[\mathbf{B} - \mathbf{A}\,(1 + \mathrm{r})]$, con

$$\mathrm{r} \geq 0\,, \tag{2}$$

perchè la equazione vettoriale (1) sia risolubile, dando come risultato un vettore di prezzi che sia positivo.

La necessità di precisare le ipotesi sotto le quali questa circostanza può avverarsi ci porterà ad enunciare certe ipotesi fondamentali (che indicheremo con la sigla UA seguita da un numero progressivo) che scegliamo tra le tante possibili; sul loro significato economico, come abbiamo già detto, intendiamo accettare il giudizio degli esperti, che possono meglio di noi valutare la attendibilità delle ipotesi stesse e delle loro implicazioni economiche; ci limitiamo tuttavia ad osservare che senza queste ipotesi (oppure altre equivalenti) il modello rappresentato dalla (1) non sarebbe « accettabile ».

UA 1 - La quantità globale di ogni merce che viene impiegata come mezzo di produzione è minore della quantità della stessa merce complessivamente prodotta nell'intero sistema economico.

Mediante il simbolismo vettoriale che abbiamo convenuto di usare, ponendo

$$\mathbf{s} = [1, 1, \ldots, 1]\,, \tag{3}$$

la ipotesi UA 1 può essere tradotta mediante la seguente relazione

$$[\mathbf{B} - \mathbf{A}]\, \mathbf{s}_T > \mathbf{0}_T\,. \tag{4}$$

UA 2 - Esiste almeno un vettore positivo $\hat{\mathbf{p}}$ di prezzi tale che il valore delle merci utilizzate come mezzi di produzione da ogni singola industria, valutato a quei prezzi, è minore del valore dei prodotti, valutato pure agli stessi prezzi.
In formule, l'enunciato della ipotesi UA 2 può essere tradotto come segue

$$E\, \hat{\mathbf{p}} \{\hat{\mathbf{p}} > \mathbf{0} \ \wedge \hat{\mathbf{p}}\, [\mathbf{B} - \mathbf{A}] > \mathbf{0}\}\,. \tag{5}$$

Questa ipotesi è analoga a quella enunciata implicitamente da Wassily Leontief per la « accettabilità » del suo modello ([6]).
Indichiamo ora con X l'insieme dei vettori colonna che hanno componenti non negative; poniamo cioè

$$X = \{\mathbf{x}_T \mid \mathbf{x}_T \geqq \mathbf{0}_T\}\,. \tag{6}$$

Indichiamo poi con U (r) l'insieme dei vettori colonna appartenenti ad X e tale che, per ogni vettore $\mathbf{x}_T$ di U (r) valga la relazione

$$[\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + r)]\, \mathbf{x}_T \geq \mathbf{0}_T\,. \tag{7}$$

In altre parole poniamo

$$U(r) = \{\mathbf{x}_T \mid \mathbf{x}_T \in X \wedge [\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + r)]\, \mathbf{x}_T \geq \mathbf{0}_T\}\,. \tag{8}$$

Si dimostra facilmente che l'insieme U (r) è un cono poliedrico convesso. Poichè è chiaramente

$$\mathbf{s} \in X\,, \tag{9}$$

dalla ipotesi (5) segue immediatamente che esiste un valore di r (e precisamente il valore r = 0) in corrispondenza al quale l'insieme U (r) non è vuoto.
Poichè la funzione vettoriale della variabile reale r data dalla espressione

$$[\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + r)]\, \mathbf{x}_T \tag{10}$$

è ovviamente continua, da quanto precede si deduce facilmente che l'insieme dei valori di r, appartenenti alla semiretta definita dalla relazione (2) in corrispondenza ai quali l'insieme U (r) non è vuoto, è un intervallo chiuso a sinistra e non vuoto. Analogamente indichiamo

6 Cfr. Wassily W. Leontief, *The Structure of American Economy*, 1919-1939, Oxford Univ. Press., New York, 1951.

con P l'insieme dei vettori che hanno componenti non negative; poniamo cioè

$$P = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}\} . \tag{11}$$

Indichiamo poi con V (r) l'insieme dei vettori non negativi e tali che, per ogni vettore $\mathbf{y}$ di V (r), valga la relazione

$$\mathbf{y}\,[\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + r] \geq \mathbf{0} ; \tag{12}$$

in altre parole poniamo

$$V(r) = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in P \wedge \mathbf{y}\,[\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + r)] \geq \mathbf{0}\} . \tag{13}$$

Anche per l'insieme V (r) si dimostra facilmente che è un cono poliedrico convesso.
Dalla ipotesi (5) si ha facilmente

$$\hat{\mathbf{p}} \in P . \tag{14}$$

Pertanto dalla ipotesi (4) segue che almeno per un valore di r (e precisamente per $r = 0$) l'insieme V (r) non è vuoto. Poichè la funzione vettoriale della variabile reale r data dalla espressione

$$\mathbf{y}\,[\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + r)] \tag{15}$$

è ovviamente continua, da quanto precede si deduce facilmente che l'insieme dei valori di r appartenenti alla semiretta definita dalla relazione (2) in corrispondenza ai quali l'insieme V (r) non è vuoto è un intervallo chiuso a sinistra.

Supponiamo ora che sia valida la ipotesi

UA 3 - Si ha

$$\det\,[\mathbf{B} - \mathbf{A}] \neq \mathbf{0} . \tag{16}$$

Questa ipotesi garantisce che almeno un valore di r, e precisamente per il valore $r = 0$, i vettori costituenti le righe della matrice $[\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + r)]$ sono linearmente indipendenti.
Poichè la funzione reale f (r) della variabile reale r definita dalla

$$f(r) = \det\,[\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + r)] \tag{17}$$

è ovviamente continua, l'insieme dei valori di r appartenenti alla semiretta definita dalla relazione (2) e tali che sia

$$\det\,[\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + r)] \neq 0 \tag{18}$$

costituisce un intervallo chiuso a sinistra, avente come estremo sinistro il valore $r = 0$.
Prendiamo in considerazione i valori di r appartenenti alla semiretta definita dalla relazione (2), in corrispondenza ai quali entrambi gli in-

siemi U (r) e V (r) siano non vuoti ed inoltre valga la (18); nel seguito, per comodità, indicheremo con $\mathcal{I}$ tale intervallo.

4 Le ipotesi UA 1, UA 2, UA 3 che abbiamo enunciate esplicitamente nel paragrafo precedente sono necessarie perchè il modello che stiamo considerando abbia delle soluzioni che posseggono significato economico. Tuttavia esse non sono ancora sufficienti perchè il modello stesso possa servire come strumento per determinare un vettore di prezzi che sia sua soluzione e che abbia, beninteso, significato economico. Infatti se consideriamo la equazione fondamentale del modello, equazione che riscriviamo qui per comodità del lettore nella forma della (1) del paragrafo 3:

$$\text{(1, paragrafo 3)} \qquad w\,\mathbf{q} = \mathbf{p}\,[\mathbf{B} - \mathbf{A}\,(1 + r)]\,,$$

appare evidente che la equazione stessa non possiede come soluzione un vettore di prezzi che sia positivo quale che sia il vettore $\mathbf{q}$ delle quantità di lavoro assorbite dalle industrie del sistema.
La validità di questa affermazione è provata dal seguente esempio: si faccia

$$k = 3 \tag{1}$$

e si considerino le matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ date nel modo seguente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \tag{2}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2.9 & 1.2 & 1.9 \\ 1.2 & 2.9 & 3.9 \\ 0.1 & 1.2 & 3.9 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Queste due matrici soddisfano alle ipotesi UA 1 ed UA 2; quest'ultima è evidentemente soddisfatta quando si assuma un vettore $\hat{\mathbf{p}}$ dato da

$$\hat{\mathbf{p}} = [1\,,\,1\,,\,1]\,. \tag{4}$$

Si verifica anche facilmente che è soddisfatta la ipotesi UA 3.
Si può anche constatare che tutte le merci considerate nel modello che stiamo esaminando sono merci base; il lettore potrà verificare questa nostra affermazione (che per il momento gli domandiamo di accettare, facendoci momentaneamente credito) quando avrà esaminato la trattazione, che daremo in seguito, del problema delle merci base e potrà

così applicare i criteri che daremo per saper giudicare se un determinato modello, del quale sono assegnate le matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, contempla anche la esistenza di merci che non sono merci base, secondo la terminologia di Sraffa e secondo la definizione che l'Autore ne dà in SRF-62 et sqq.
D'altra parte si verifica pure che, fatto

$$r = 0 ; w = 1 ; \tag{5}$$

il vettore di quantità di lavoro dato da

$$\mathbf{q} = [1.73 , 1.66 , 0.47] \tag{6}$$

dà luogo al seguente vettore di prezzi

$$\mathbf{p} = [11 , 1 , -0.7] \tag{7}$$

e pertanto dà luogo ad un vettore di prezzi che non sono tutti positivi.
Dall'esempio che abbiamo ora esaminato si trae che, affinchè il modello sia « accettabile », deve essere enunciata qualche ulteriore ipotesi la quale fornisca le condizioni sotto le quali, in presenza della equazione (1) del paragrafo 3, fissati che siano i valori di r e di w, un vettore $\mathbf{q}$ di quantità di lavoro dia luogo ad un vettore positivo di prezzi, almeno nella ipotesi restrittiva in cui ci siamo posti, cioè nella ipotesi che tutte le merci considerate siano merci base.
Per giungere ad enunciare tale ipotesi, consideriamo una matrice $[\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + r)]$, corrispondente ad un valore di r che appartiene all'intervallo $\mathcal{I}$ che abbiamo definito nel paragrafo 3. Indichiamo poi con $V'(r)$ l'insieme dei vettori $\mathbf{z}$ dati dalla formula

$$\mathbf{z} = \mathbf{p}[\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + r)] \tag{8}$$

quando $\mathbf{p}$ appartenga all'insieme $V(r)$; tale insieme $V'(r)$ si potrebbe chiamare la « immagine » di $V(r)$ per la applicazione lineare data dalla matrice quadrata $[\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + r)]$; esso è definito dalla formula

$$V'(r) = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \mathbf{p}[\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + r)] \wedge \mathbf{p} \in V(r)\} . \tag{9}$$

Dalla definizione che abbiamo data di $V'(r)$ si trae immediatamente che vale la

$$\mathbf{q} \in V'(r) \rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{q}[\mathbf{A} - \mathbf{B}(1 + r)]^{-1} > 0 . \tag{10}$$

Pertanto la ipotesi che abbiamo in vista può essere enunciata nel modo seguente

UA 4 - Assegnato che sia un valore di r che appartiene all'intervallo $\mathcal{I}$, il vettore $\mathbf{q}$ appartiene all'insieme $V'(r)$. In formule

$$r \in \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{q} \in V'(r) . \tag{11}$$

5 E' nota la importanza che nel sistema di P. Sraffa è rivestita dal prodotto tipo: nel caso delle industrie a prodotto singolo (di cui si tratta nella parte prima dell'opera) esso serve come numerario per la misura del valore del prodotto complessivo, per la misura del salario e dei prezzi. Analoga importanza sembra avere il prodotto tipo anche nel caso di produzione congiunta; in questo secondo caso tuttavia pare che anche Sraffa si sia reso conto della possibilità di complicazioni nella definizione del prodotto tipo; almeno in questo senso pare che si possano interpretare le affermazioni di SRF-59 nelle quali l'Autore afferma essere evidente che per la formazione del prodotto tipo devono essere considerati anche dei moltiplicatori negativi.
Tuttavia non pare che Sraffa sia stato sfiorato dal minimo dubbio sulla possibilità di immaginare la esistenza di un prodotto tipo, mentre invece tale possibilità non si verifica in generale, ma deve essere postulata mediante una opportuna ipotesi sulla costituzione delle matrici che abbiamo chiamate **A** e **B**.
Per chiarire ulteriormente il nostro pensiero, osserviamo che l'insieme dei moltiplicatori che dànno luogo al prodotto tipo è definito dalla equazione

$$(1 + R)\mathbf{A}\,\mathbf{x}_T = \mathbf{B}\,\mathbf{x}_T\,; \qquad (1)$$

questa equazione vettoriale discende dalla (5) del paragrafo 2 nella quale è stato fatto

$$r = R\,; \qquad w = 0\,; \qquad (2)$$

le componenti del vettore $\mathbf{x}_T$ (definite a meno di un fattore moltiplicativo comune) sono i coefficienti della combinazione lineare delle industrie che dànno luogo al prodotto tipo. La equazione (1) traduce il sistema scritto in SRF-67; qui si fa l'ipotesi che tutte le merci che vengono considerate siano merci base; questa ipotesi non è restrittiva per ciò che diremo ed il lettore potrà tradurre la nostra equazione quando avremo completato la trattazione del caso della esistenza di prodotti non base, trattazione che faremo in seguito, come abbiamo già annunciato.
La (1) può anche essere scritta nella forma seguente:

$$[\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + R)]\,\mathbf{x}_T = \mathbf{0} \qquad (3)$$

Questa equazione, a norma di teoremi classici di algebra dei sistemi di equazioni lineari, può essere soddisfatta da un vettore $\mathbf{x}_T$ che sia diverso dal vettore nullo soltanto se è

$$\det[\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + R)] = 0\,. \qquad (4)$$

Inoltre il prodotto tipo ha un senso, per il significato economico che

Sraffa gli attribuisce, soltanto se il vettore $\mathbf{x}_T$ è univocamente definito, in corrispondenza ad un valore R che soddisfi alla (4), a meno di un fattore moltiplicativo. Ciò può avvenire se il valore

$$r = R \tag{5}$$

è radice semplice della equazione algebrica

$$\det [\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + r)] = 0 . \tag{6}$$

Tutte queste circostanze si avverano per il modello che P. Sraffa presenta nel caso delle industrie a prodotto singolo, in base a noti teoremi di Perron e Frobenius. Ma nel caso del modello che ci interessa queste circostanze possono anche non presentarsi, come è dimostrato dall'esempio seguente, nel quale non è possibile neppure costruire il prodotto tipo, almeno rimanendo nel campo dei numeri reali.
Si consideri un modello in cui sia

$$k = 2 \tag{7}$$

e si abbia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1.1 \\ 1.1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1.09 & 1.144 \\ 1.144 & 0.99 \end{bmatrix} . \tag{9}$$

Posto per un momento

$$1 + r = t \tag{10}$$

si ha facilmente che la equazione

$$\det [\mathbf{B} - \mathbf{A}\, t] = 0 \tag{11}$$

si traduce in questo caso nella equazione

$$0.21\ t^2 - 0.4368\ t + 0.229636 = 0 , \tag{12}$$

la quale non possiede alcuna radice reale [7].
D'altra parte si verifica facilmente che le matrici **A** e **B** date rispettivamente dalle (8) e (9) soddisfano alle ipotesi UA 1, UA 2, UA 3.
Pertanto, affinchè siano valide le deduzioni di P. Sraffa, occorre che sia valida la ipotesi seguente:

7 Il termine « numero reale » e « soluzione reale » è usato qui nel senso tecnico preciso della matematica e non nel senso un po' vago in cui è usato in SRF-56; in questa ultima pagina, invero, per quanto è dato di poter capire, l'Autore usa la espressione « soluzioni reali » per dire, forse, « soluzioni che abbiano significato economico », ovvero « che abbiano una rispondenza nella realtà ».

UA 5 - La equazione algebrica nella incognita r

$$\det [\mathbf{B} - \mathbf{A}(1 + r)] = 0 \qquad (13)$$

ammette almeno una radice reale e positiva. Tale radice (oppure la minima tra le radici reali e positive se ve ne è più di una) è radice semplice della equazione algebrica (13).
La clausola finale, la quale postula che la radice, supposta esistente, oppure la minima tra le radici, debba essere una radice semplice della equazione (13) è basata sulle seguenti considerazioni: da quanto è scritto in SRF-67 appare che, per ragioni inerenti al significato economico del prodotto tipo, l'Autore voglia adottare la convenzione di assumere come radice della equazione (13), nel caso in cui esistano diverse radici positive, quella minima, per la costruzione del prodotto tipo; tuttavia, affinchè abbia senso la costruzione del prodotto tipo occorre che, indicata con ρ tale radice, la corrispondente equazione (3) abbia un solo vettore soluzione, definito a meno di una costante moltiplicativa. Sarebbe invero contraria ai desideri dell'Autore la circostanza che si presenterebbe se la (3) avesse come soluzioni almeno due vettori linearmente indipendenti. Ora ciò potrebbe avvenire soltanto nel caso in cui la radice ρ considerata non fosse radice semplice per la equazione (13).

6 Come è noto, la distinzione tra prodotti base e prodotti non base è essenziale nella trattazione di P. Sraffa, tra l'altro perchè, secondo la sua concezione, sono i primi che determinano il vettore di prezzi che soddisfa alla equazione fondamentale del suo modello.
La distinzione tra prodotti base e prodotti che non lo sono è data in SRF-62 et sqq., e sarà qui tradotta nel simbolismo matematico che abbiamo convenuto di adottare.
A tal fine supponiamo che certe m merci del nostro sistema economico siano non base. E' ovviamente

$$m < k \,, \qquad (1)$$

e possiamo porre, per comodità,

$$k = j + m \qquad (j > 0) \,. \qquad (2)$$

Valendoci della osservazione che abbiamo enunciata nel paragrafo 2 possiamo sempre immaginare di aver riordinato le righe delle matrici **A** e **B** (e di conseguenza anche gli elementi del vettore **p**) in modo che le merci che interessano siano corrispondenti alle ultime m righe delle matrici stesse.
Per maggiore chiarezza, dopo questo riordinamento, possiamo considerare la matrice **A** e la matrice **B** come ottenute per accostamento di

due matrici ognuna, che indicheremo con $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$ e $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}''$, rispettivamente; le matrici $\mathbf{A}'$ e $\mathbf{B}'$ sono rettangolari e di tipo (j, k), mentre le matrici $\mathbf{A}''$ e $\mathbf{B}''$ sono pure rettangolari ma di tipo (m, k). Scriveremo dunque

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}' \\ \hline \mathbf{A}'' \end{array}\right] \quad ; \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}' \\ \hline \mathbf{B}'' \end{array}\right] . \tag{3}$$

Mediante le matrici $\mathbf{A}''$ e $\mathbf{B}''$ si costruisca ora la matrice $\mathbf{D}$ di tipo $(2m, k)$ che si ottiene per accostamento delle due matrici $\mathbf{A}''$ e $\mathbf{B}''$; poniamo quindi

$$\mathbf{D} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}'' \\ \hline \mathbf{B}'' \end{array}\right] . \tag{4}$$

Secondo le idee esposte da P. Sraffa, se le m merci che corrispondono alle righe le quali entrano a formare le matrici $\mathbf{A}''$ e $\mathbf{B}''$ sono non base la matrice $\mathbf{D}$ ha rango m.

Ciò significa, in altre parole, che tra le colonne della matrice $\mathbf{D}$ soltanto m sono linearmente indipendenti, e che quindi tutte le altre si possono ottenere come combinazione lineare di esse.

Valendoci ancora una volta della osservazione enunciata nel paragrafo 2, possiamo pensare di aver riordinato le colonne della matrice $\mathbf{A}$ e della $\mathbf{B}$ (e quindi anche gli elementi del vettore $\mathbf{q}$) in modo che le m colonne che formano una base per le colonne della matrice $\mathbf{D}$ siano le ultime colonne di tali matrici.

La condizione espressa da P. Sraffa affinchè le m merci che corrispondono alle ultime m righe delle matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ siano non base, dopo il riordinamento che abbiamo supposto di avere eseguito, si traduce nel modo seguente:

immaginiamo le matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ decomposte ognuna in quattro sottomatrici $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{A}_{22}$ e rispettivamente $\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{B}_{12}$, $\mathbf{B}_{21}$, $\mathbf{B}_{22}$; le matrici $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{B}_{11}$ sono quadrate di ordine j; le matrici $\mathbf{A}_{22}$, $\mathbf{B}_{22}$ sono pure quadrate e di ordine m. Si avrà quindi

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] ; \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right] . \tag{5}$$

Le merci corrispondenti alle ultime m righe delle due matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono non base, secondo la concezione di P. Sraffa, se esiste una matrice $\mathbf{H}$ di tipo (m, j) tale che si abbia

$$\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{22}\,\mathbf{H} \; ; \quad \mathbf{B}_{21} = \mathbf{B}_{22}\,\mathbf{H} . \tag{6}$$

La matrice $\mathbf{H}$ è quella costituita dai coefficienti delle combinazioni lineari mediante le quali le prime j colonne delle matrici $\mathbf{A}''$ e $\mathbf{B}''$ (ovviamente dopo il riordinamento di cui si è parlato) si esprimono mediante le ultime m.
Possiamo pertanto costruire la matrice $\mathbf{M}$, quadrata di ordine k, nel modo seguente

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_j & 0 \\ \hline -\mathbf{H} & \mathbf{I}_m \end{array}\right] \tag{7}$$

dove $\mathbf{I}_j$ ed $\mathbf{I}_m$ sono le matrici identità, rispettivamente degli ordini j e m. In base alle (6) si ha allora facilmente che le matrici

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\,\mathbf{M}\,; \quad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\,\mathbf{M} \tag{8}$$

hanno la forma seguente

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|c} \overline{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline 0 & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right]; \qquad \overline{\mathbf{B}} = \left[\begin{array}{c|c} \overline{\mathbf{B}}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline 0 & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right], \tag{9}$$

dove in particolare è

$$\overline{\mathbf{A}}_{11} = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{H}\,; \quad \overline{\mathbf{B}}_{11} = \mathbf{B}_{11} - \mathbf{B}_{12}\,\mathbf{H}\,. \tag{10}$$

Possiamo ora distinguere nel vettore $\mathbf{q}$ il complesso costituito dalle prime j componenti e quello costituito dalle ultime m; poniamo quindi

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}^1 \,|\, \mathbf{q}^2] \tag{11}$$

essendo, come è stato detto, $\mathbf{q}^1$ costituito da j componenti e $\mathbf{q}^2$ costituito da m componenti.
Poniamo ora

$$\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{q}\,\mathbf{M}\,; \tag{12}$$

si avrà

$$\overline{\mathbf{q}} = [\mathbf{q}^1 \,|\, \mathbf{q}^2] \tag{13}$$

dove ovviamente

$$\overline{\mathbf{q}}^1 = \mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2\,\mathbf{H}\,. \tag{14}$$

Analogamente possiamo considerare il vettore dei prezzi $\mathbf{p}$ come costituito da due complessi, rispettivamente di j e di m componenti, ponendo analogamente alla (11)

$$\mathbf{p} = [\mathbf{p}^1 \,|\, \mathbf{p}^2]\,. \tag{15}$$

Possiamo infine immaginare di aver moltiplicato entrambi i membri della equazione fondamentale del modello

$$\mathbf{p}\,\mathbf{A}\,(1 + r) + w\,\mathbf{q} = \mathbf{p}\,\mathbf{B} \tag{16}$$

a destra per la matrice $\mathbf{M}$.

Con le posizioni fatte, e dopo la moltiplicazione a destra per la matrice $\mathbf{M}$, la equazione (16) può essere sostituita dal sistema delle due equazioni seguenti

$$\begin{cases} \mathbf{p}^1\,\overline{\mathbf{A}}_{11}\,(1 + r) + w\,\overline{\mathbf{q}}^1 = \mathbf{p}^1\,\overline{\mathbf{B}}_{11} & (17) \\ \mathbf{p}^1\,\mathbf{A}_{12}\,(1 + r) + \mathbf{p}^2\,\mathbf{A}_{22}\,(1 + r) + w\,\mathbf{q}^2 = \mathbf{p}^1\,\overline{\mathbf{B}}_{11} + \mathbf{p}^2\,\mathbf{B}_{22}\,. & (18) \end{cases}$$

La equazione vettoriale (17) traduce il sistema di equazioni che viene scritto in SRF-66. E' da notare tuttavia che tale sistema non è da considerarsi equivalente a quello che traduce la equazione vettoriale fondamentale (16), almeno se si vuole conservare al termine « equivalente » il significato che esso ha nella teoria dei sistemi di equazioni lineari. Basti invero la osservazione che il sistema che traduce la equazione (17) ha un numero di equazioni e di incognite diverso (e precisamente minore) di quello che traduce la equazione (16).
A rigor di termini, soltanto il sistema costituito dalla coppia di equazioni (17) e (18) è equivalente alla equazione (16), nel senso che ogni soluzione della equazione (16) fornisce una soluzione della coppia di equazioni (17), (18), e viceversa ogni soluzione della coppia di equazioni (17), (18) fornisce una soluzione della equazione (16). Tuttavia va osservato che la coppia di equazioni (17), (18) può essere risolta nell'ordine in cui è stata scritta: invero la equazione (17) coinvolge soltanto il vettore $\mathbf{p}^1$, che ha come sue componenti soltanto i prezzi delle merci base; determinati tali prezzi è possibile risolvere anche la (18) determinando i prezzi delle altre merci, beninteso quando siano soddisfatte le condizioni che rendono possibili tali soluzioni.
A proposito della equazione (17) possono essere fatte le osservazioni analoghe a quelle che sono state fatte a proposito della equazione fondamentale (16) nel caso in cui tutti i prodotti siano prodotti base: invero non è detto che qualunque scelta del vettore $\overline{\mathbf{q}}^1$ porti ad una soluzione che contempla componenti tutte positive del vettore di prezzi $\mathbf{p}^1$. Al riguardo andrebbero emesse delle ipotesi analoghe alla UA 4, enunciata sopra alla fine del paragrafo 4. Osserviamo tuttavia ulteriormente che nel caso della equazione vettoriale (17) il vettore $\overline{\mathbf{q}}^1$ che vi compare e che è dato dalla (14) può non avere componenti positive. Ora P. Sraffa ha dato una interpretazione del fatto che, ai fini

della costruzione di un prodotto tipo e per mettere in evidenza il fatto che alcuni prodotti non sono prodotti base, si possa concepire una combinazione lineare di industrie con coefficienti non tutti positivi (si vedano al proposito le argomentazioni svolte in SRF-61); ma non pare si sia preoccupato di dare una interpretazione a quantità di lavoro negative assorbite da industrie. Questa introduzione pertanto resta da giustificare o da interpretare, e lasciamo volentieri questo compito agli economisti.

La costruzione del prodotto tipo nel caso della equazione (17) deve essere fatta con un procedimento che abbiamo già esaminato nel paragrafo 5, e pertanto la possibilità di una costruzione cosiffatta deve essere accertata da una ipotesi analoga alla UA 5, perchè essa non è accertata dalle sole ipotesi UA 1, UA 2, UA 3, UA 4.

Tip. Stefano Pinelli via Farneti 8 Milano

COLLECTANEA MATHEMATICA

Pubblicazioni dell'Istituto di Matematica dell'Università di Milano

263 — F. Graiff — Sull'uso di coordinate armoniche in relatività generale. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

264 — G. Ricci — Sul teorema di Carathéodory-Bohr-Banach riguardante la copertura secondo Vitali. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

265 — L. Cupello — Sulle costanti delle condizioni di Hölder in forma integrale. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

266 — N. M. Ferlan — Sul minimo modulo delle funzioni analitiche. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

267 — F. Skof — Sull'attenuazione delle condizioni tauberiane. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

268 — E. Bombieri — Sul problema di Bieberbach per le funzioni univalenti. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

269 — M. Dedò -- Sistemi di cerchi. *Period. di Matem.* (1963).

270 — D. Roux — Sulle orientazioni di più forte accrescimento delle funzioni intere di ordine finito e tipo medio. II. - Ordine ρ diverso dal reciproco di un intero naturale. *Riv. Matem. Univ. di Parma* (1963).

271 — D. Roux — Sul divario fra l'ordine e l'ordine inferiore delle funzioni intere. *Riv. Matem. Univ. di Parma* (1963).

272 — L. Cupello — Sulla condizione di Hölder in forma integrale. *Riv. Matem. Univ. di Parma* (1963).

273 — G. Ricci — Il pensiero matematico, impronta latente nel mondo d'oggi. *Atti del VII Congresso Unione Matem. Ital., Genova* (1963).

274 — G. Melzi — Varietà topologiche plurifibrate e varietà differenziabili tre volte rigate. Note I, II. *Rend. Ist. Lomb.* (1964).

275 — F. Skof — Effetto dell'attenuazione delle condizioni tauberiane per le serie di potenze. *Ann. di Matem. pura ed appl.* (1964).

276 — N. M. Ferlan — Sull'andamento del minimo modulo delle funzioni analitiche. *Boll. U.M.I.* (1964).

277 — V. Zambelli — Il sottogruppo di Hughes e la serie centrale ascendente. *Boll. U.M.I.* (1964).

278 — C. F. Manara — Ufficio e significato dell'esperimento nell'insegnamento della geometria. *Period. di Matem.* (1964).

279 — C. F. Manara — Un teorema di Beppo Levi riguardante la logica formale. *Period. di Matem.* (1965).

280 — C. Cercignani — Sugli integrali impropri nel senso di Hadamard e su alcuni operatori ad essi collegati. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1965).

281 — E. Bombieri — On the large sieve. *Ed. Tamburini, Milano* (1965).

281 bis — E. Bombieri — On the large sieve. *Mathematika* (1965).

282 — M. Dedò — Questioni diofantee in problemi di geometria elementare. *Period. di Matem.* (1965).

283 — M. Dedò -- Esami di abilitazione e concorsi a cattedre. *Period. di Matem.* (1965).

284 — M. Marchi — Il tema di matematica assegnato agli esami di abilitazione. (Cl. XIII). *Period. di Matem.* (1964).
M. D'Aprile — Il tema di matematica assegnato all'esame di abilitazione. *Period. di Matem.* (1965).
P. G. Giudici — La prova scritta del concorso per i Licei. *Period. di Matem.* (1965).

285 — Albertoni - Lunelli - Maggioni — Metodi iterativi variazionali per i problemi ellittici nella teoria dei reattori nucleari. *Atti Sem. Matem. e Fis. dell'Univ. di Modena* (1965).

286 — F. Skof - L. Tanzi Cattabianchi — Variazioni di segno condizionate e presenza di un punto singolare su un arco. *Riv. Mat. Univ. Parma* (1964).

287 -- M. Pastori — Sull'integrazione delle equazioni indefinite di equilibrio per sistemi continui. *Atti del Simposio Intern. sulle Applicazioni dell'Analisi alla Fisica Matem., Cagliari-Sassari* (1964).

288 — E. Bombieri — On functions which are regular and univalent in a half-plane. *Proc. London Math. Soc.* (1965).

289 — F. Graiff — Sui superpotenziali nella teoria della Relatività Generale. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1965).

(*segue a pag. 3 della copertina*)

ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITÀ, VIA C. SALDINI 50, MILANO (ITALIA)

ACHILLEA - MILANO